



TEXTO PARA DISCUSSÃO

ISSN 0103-9466

473

Resultados seminais e desenvolvimentos recentes da teoria da escolha social

Gustavo de O. Aggio

Novembro 2024



ie Instituto de
economia

Resultados Seminais e Desenvolvimentos Recentes da Teoria da Escolha Social

Gustavo de O. Aggio*

Resumo

O estudo das escolhas coletivas, aquelas que devem ser feitas por um conjunto de pessoas, e dos seus mecanismos configura caso único na teoria econômica *mainstream*. Isso ocorre uma vez que não existe um conjunto bem definido de resultados e teorias que informam como estas escolhas deveriam ser e como ocorrem. Na verdade, o mais comum é que os resultados teóricos negativos, aqueles que identificam dificuldades ou impossibilidades, tenham destaque. Seja pela importância do objeto de estudo, seja por não existir um “final da história”, esta área de pesquisa permanece efervescente. O objetivo deste texto de discussão é duplo: sumarizar alguns dos resultados seminais deste conjunto teórico, assim como o ponto de vista de alguns comentadores; posteriormente, serão apresentados alguns desenvolvimentos mais recentes da literatura, principalmente com o foco na dinâmica.

Palavras chave: Escolhas coletiva, Teoria da Escolha Social, Teorema da Impossibilidade, Escolha Dinâmica.

Códigos JEL: D71, D72, C61 e C73.

The study of collective choices, ones in which a set of people should take part, and the mechanisms by which they occur configures a unique phenomenon in mainstream economics. The reason is that no set of definitive results and theories establishes how things should be or as they really are. Commonly, the most remarkable theoretical results are negative, they identify difficulties or impossibilities. This research program persists effervescently maybe because of the importance of collective choices, or because the theory has an open-ended character, or both reasons. There is a double objective in this working paper: resume some of the seminal results, as well as present some commentators; additionally, there is also the objective of presenting some recent developments, mainly ones with dynamic processes.

Introdução

O estudo das escolhas realizadas por coletivos de pessoas, tais como eleições majoritárias, representantes legislativos decidindo entre alternativas para uma alocação de recursos, trabalhadores sindicalizados definindo as demandas a serem apresentadas em um período de dissídio salarial, colegiados acadêmicos deliberando sobre quais áreas serão contempladas com novas contratações, ou mesmo grupos mais reduzidos como alguns amigos escolhendo para onde viajar, resultou em uma área de colaboração entre as ciências políticas e a economia em suas vertentes contemporâneas. Entretanto, os estudos analíticos de mecanismos de escolha têm raízes em contribuições que antecedem a formação destes campos de investigação como disciplinas autônomas. Muitas das discussões na área remetem aos trabalhos

*Departamento de Teoria Econômica da Universidade Estadual de Campinas. Email: aggio@unicamp.br, ORCID <https://orcid.org/0000-0003-4702-4061>

originais dos matemáticos Jean-Charles de Borda e Jean Antoine Nicolas de Caritat, este último sendo mais conhecido como (o marquês de) Condorcet, desenvolvidos no Século XVIII, para localizar historicamente o surgimento de um estudo sistemático desta classe de problemas. Entretanto, as contribuições originais destes iluministas não são mera curiosidade histórica, ainda hoje aparecem como possibilidades recorrentemente analisadas e adaptadas para diferentes contextos e aplicações.

Para um tema tão abrangente, é comum que sejam identificadas diferentes vertentes ou abordagens e que estas diferenças sejam por si só objeto de discussão e de estudo, veja Mueller (2015) e Zamora-Bonilla (2023), como exemplos. Aqui, o foco será em contribuições comumente identificadas com a vertente da *Teoria da Escolha Social* (TES). Serão apresentados conceitos, resultados seminais e desenvolvimentos recentes deste corpo teórico, sem deixar de considerar que as outras abordagens podem ser compatíveis ou complementares.

Além dos trabalhos de Borda e Condorcet, a TES tem suas raízes nos desenvolvimentos da teoria microeconômica contemporânea, aquela com a ênfase na noção de preferências, do emprego da metodologia axiomática como base da dedução de resultados, e que se consolidou como vertente principal da área entre os anos 1930 e 1950. Neste contexto, um conjunto de autores buscou estender os métodos da escolha individual para a escolha coletiva. Uma primeira linha de discussão foi a sugerida a partir do trabalho de Bergson (1938), com a maximização de funções sociais ou coletivas de bem-estar, as quais eram definidas em seu domínio pelas quantidades de bens consumidos por cada pessoa, assim como o uso de fatores em cada produção, incluindo o trabalho de cada pessoa. Uma linha que ficou conhecida como *nova economia do bem-estar*, em contraposição com as ideias de soma de utilidades que existiam anteriormente (Lützen 2019).¹

Entretanto, a linha de pesquisa que teve maior apelo foi aquela que explorou de forma generalizada as possibilidades e limitações de mecanismos de escolhas. Tais mecanismos compreendem todos os procedimentos que partem da participação individual para se chegar a uma escolha coletiva, como uma votação nominal ou apresentação de listas de preferências, por exemplo. Muito do que se desenvolveu revela a dificuldade, ou mesmo a impossibilidade, de um funcionamento ideal destes mecanismos. Esta noção de “ideal” refere-se à compatibilidade de qualquer mecanismo com exigências normativas explicitadas e defendidas pelos autores.

São dois os objetivos deste texto de discussão. O primeiro é fazer um levantamento bibliográfico destas contribuições seminais, com indicações de fontes para leituras mais aprofundadas (Seção 1), além de apresentar alguns comentadores com diferentes pontos de vista (Seção 2). Alcançado este objetivo, ficará à disposição dos interessados um sumário acessível de resultados e uma fonte de referências. O segundo objetivo é fazer um primeiro levantamento de desenvolvimentos recentes com ênfase em processos dinâmicos (Seção 3). A ênfase na dinâmica evidencia o interesse em compreender e delimitar processos da escolha coletiva que se aproximam mais da experiência real, onde tais problemas são recorrentemente realizados e seus resultados reavaliados. Esta classe de trabalhos demonstra ter grande potencial de gerar desdobramentos na forma novas pesquisas e aplicações. Como se sabe, a TES é uma área de estudos intensivamente formalizada com o instrumental matemático. Alguns autores, como Saari (2008), chegam

1. Esta linha teórica é também conhecida como a de função de escolha social de Bergson-Samuelson, pelas contribuições posteriores deste segundo autor, veja Sen (1986).

a classificá-la como uma disciplina da matemática aplicada. Portanto, este texto de discussão também cumpre a função de fazer uma leitura intermediada destes resultados para um público mais geral.

1 Resultados seminais da TES

Nesta seção será exposto um conjunto de resultados amplamente reconhecidos como seminais na vertente da escolha social, mas sem buscar ser exaustivo ou mesmo contemplar uma amostra de cada um dos variados desdobramentos. Para quem tiver interesse em apresentações mais completas veja Sen (1986) e List (2022), por exemplo.

1.1 Paradoxo de Condorcet

O chamado *paradoxo de Condorcet* é um exemplo simples, recorrentemente apresentado nos mais diferentes níveis de discussão, sobre a dificuldade de estabelecer critérios de maiorias como solução de problemas de escolha coletiva que considerem ordenações de três ou mais alternativas.²

Considere que três pessoas (A , B e C) estabelecem comparações dois a dois entre três possibilidades (x , y e z) mutuamente excludentes. Tais comparações são representadas por uma relação binária P que é (i) transitiva, (ii) assimétrica, (iii) antirreflexiva e (iv) completa. Ou seja, (i) xPy associado a yPz implica xPz , (ii) xPy não pode ocorrer simultaneamente a yPx , (iii) não ocorre xPx e (iv) para todo par x, y de alternativas, cada pessoa deve ser capaz de informar se xPy ou yPx . Trata-se da relação de preferência estrita ou de estritamente melhor, para usar os termos da microeconomia. Assuma que o objetivo é uma regra de escolha social que estabeleça uma ordenação com a relação P e que respeite as ordenações dois a dois que formarem uma maioria.

Um exemplo evidenciará a impossibilidade de uma regra universal de agregação pela maioria. Suponha que para A temos xP_AyP_Az (uma forma sintética de representar xP_Ay simultâneo a yP_Az , onde o subscrito em P_A informa que a relação expressa a preferência de A), para B temos yP_BzP_Bx e, por fim, para C temos zP_CxP_Cy . Observe que para A e C ocorre x preferido a y , para A e B ocorre y preferido a z e que para B e C ocorre z preferido a x . Como são apenas três votantes, cada par deles forma uma maioria em uma ordenação, uma vez que $2/3 > 50\%$. Assim, agregando pelas maiorias, seria observado $xPyPzPx$ (onde P sem o índice é a relação para o grupo, a relação social). Uma vez assumida a transitividade de P , então $xPyPzPx$ implica xPx , o que viola a antirreflexividade da relação de preferência.

Uma possibilidade seria a de relaxar a hipótese de transitividade. Na escolha individual, a não transitividade normalmente é relacionada a uma *irracionalidade econômica*, enquanto que em escolhas sociais esta classificação possa ser mais controversa (May 1954). De fato, o problema se deve a ocorrência de uma *circularidade* no exemplo, ou seja o tipo de situação onde se observa uma contradição dentro de uma cadeia de relações, classificações ou escolhas (a depender do contexto). Em $xPyPzPx$, que é a representação sintética para a simultaneidade entre xPy , yPz e zPx , há uma contradição na informação

2. O exemplo que será apresentado aqui é o mais simples possível, semelhante ao exposto em Morreau (2019), dentre outros. Confira o exemplo de Condorcet e a referência para este em Lützen (2019, p. 63).

que z é melhor escolha do que x quando se afirmou anteriormente que y é melhor do que z e x melhor do que y . Se esta contradição tem o mesmo peso na escolha coletiva como tem na escolha individual é uma questão a se discutir. De qualquer forma, os principais resultados teóricos irão exigir a não circularidade na escolha social.

1.2 Possibilidades de agregação com preferências de pico único

Um primeiro resultado com relação à possibilidade de agregação de preferências transitivas é o de Duncan Black (1948). Neste trabalho pioneiro, o autor explorou o mecanismo de votações majoritárias nas quais as pessoas possuem *preferências de pico único*. Para explicar o que é uma preferência de pico único, será preciso circunscrever as possibilidades das alternativas. A forma típica do problema tratado por Black (1948) é a escolha social do valor de uma variável, considerando que possa se apresentar uma escala de menor para maior valor entre as opções. Exemplos óbvios são os naturalmente quantificáveis como, por exemplo, um orçamento de gastos, uma quantidade física de alguma alocação etc. Por outro lado, alguns exemplos podem ser subjetivos, como a localização de um ou uma candidata no espectro político, de mais à esquerda (menor valor numérico em uma reta real, uma vez que, por convenção, a reta é crescente da esquerda para a direita), passando pelo centro político e, daí, para a direita (maior valor em uma reta real).

A ideia de preferência de pico único para valores de variáveis com estas características é baseada na hipótese de que cada pessoa tem um valor preferido a todos os outros. Além disso, conforme um valor continuamente se afasta deste valor ideal, vai ficando cada vez menos preferido, seja um valor maior ou um menor do que aquele preferido, não necessariamente de uma forma simétrica, mas monotonamente diminuindo dos dois lados. Preferências de pico único são por vezes chamadas de *unimodais*, em analogia às distribuições probabilísticas que possuem uma única moda, como a normal, por exemplo. Entretanto, esta analogia é mais adequada para as distribuições de preferências. O exercício que Black (1948) propôs foi o de verificar que, em disputas dois a dois entre duas alternativas, a escolha pelo voto majoritário seria do valor mais próximo do valor ótimo mediano. Realizando a comparação dois a dois entre todas as alternativas, aquela que sobraria ao final é a mais próxima da mediana (igual a este valor no caso de um número ímpar de votantes).³

1.3 O Teorema da Impossibilidade de Arrow

Destarte a importância do resultado de Black (1948), seja pela sua contribuição original, seja por ainda ser um resultado bastante empregado, não há dúvidas que o mais importante desenvolvimento da TES é um teorema que vai informar não ser possível fazer uma agregação de preferências respeitando certas condições. Este teorema foi enunciado e provado por Kenneth Arrow em sua tese de doutorado em 1949, mas a referência padrão é o seu livro (Arrow 1951).⁴ As tais condições do teorema, que serão chamadas

3. A contribuição de Black (1948) é mais relacionada com a *Teoria da Escolha Pública* do que com a TES. Entretanto, é fato suficientemente documentado que Arrow chegou independentemente aos mesmos resultados (Lützen 2019, p. 65). Mais importante do que isso, é observar que não vale a pena ignorar um resultado importante apenas porque um autor é mais reivindicado em uma comunidade do que em outra.

4. Veja (Lützen 2019) para detalhes históricos deste desenvolvimento.

aqui de *Condições de Arrow*, são proposições normativas que este autor considerou para a delimitação de um mecanismo que partisse das ordenações individuais de preferências e levasse a uma ordenação social. Com a difusão de seus resultados e dos trabalhos derivados, tais condições foram alteradas na forma. Nesta apresentação, o critério de escolha foi a simplicidade. De fato, até o próprio Arrow aceitou alguma simplificação em sua segunda versão do livro (Arrow 1963).

A ideia é estudar as possibilidades de uma função (que será chamada de *função social*) que leva elementos de um domínio contendo conjuntos de ordenações individuais para uma ordenação social. Tanto as ordenações individuais como a coletiva devem estar na forma de uma relação completa e transitiva R , a qual implica xPy quando se observa xRy , mas não yRx ; adicionalmente, quando ocorre xRy combinado com yRx , então xIy (ou, alternativamente, yIx , uma vez que I é relação simétrica). R é a relação de preferência fraca ou de ao menos tão boa quanto a alternativa e I a de indiferença. Uma ordenação com estas propriedades é chamada de *ordem fraca*. Por um abuso de notação, R_i isoladamente, ou seja, sem carregar uma alternativa de cada lado, irá representar uma ordenação de preferências do i -ésimo indivíduo, enquanto que R será a ordenação social.

A seguir, as Condições de Arrow:

Domínio Irrestrito (DI): Seja uma sociedade com n indivíduos ou votantes, cada elemento do domínio da função social será formado por conjuntos com uma ordenação para cada votante. O domínio é chamado de irrestrito porque a função pode ser aplicada a qualquer conjunto de ordenações individuais concebíveis. Em outras palavras, no domínio irrestrito estão presentes elementos nos quais cada indivíduo pode ter qualquer ordenação de alternativas e todas as combinações de ordenações estão presentes.

O objetivo de Arrow foi o de possibilitar a assimetria de informação sobre as escolhas. A princípio, em seu trabalho original (Arrow 1951), este autor estabeleceu algo mais restrito, a saber, que para ao menos três alternativas não haveria como determinar de partida qual seriam as preferências de cada votante; tendo, assim, a liberdade de considerar uma função que pudesse atuar sobre qualquer combinação destas três alternativas. A escolha por um domínio irrestrito radicaliza esta possibilidade e o próprio Arrow a classificou como mais do que necessária na segunda edição de seu livro (Arrow 1963), apesar de adotá-la.⁵

Formalmente, o domínio irrestrito pode ser representado pelo conjunto \mathcal{D} , tal que cada um de seus elementos é também um conjunto na forma $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ onde R_i , com $i = 1, \dots, n$, é a ordenação completa e transitiva do i -ésimo votante. Para um número finito de votantes e um número finito de alternativas, o conjunto \mathcal{D} também terá um número finito de elementos. Por exemplo, seja uma sociedade com três votantes e quatro alternativas (x, y, z e w), então $\{R_1, R_2, R_3\}$ com

$$R_1 = xI_1yP_1zI_1w,$$

$$R_2 = yP_2xP_2wP_2z$$

5. A diferença entre a primeira e a segunda edição do livro de Arrow se resume à adição de um capítulo na forma de adendo. É neste adendo que Arrow assume algumas condições mais simplificadas e informa uma prova mais geral do seu teorema. Quando for referido a esta segunda edição, basicamente a referência é ao adendo.

e

$$R_3 = zP_3xI_3yI_3w,$$

será um dos elementos do domínio irrestrito neste problema de escolha.

Unanimidade (U): Em um problema de escolha com n votantes, sejam x e y duas das alternativas presentes e D um elemento de \mathcal{D} tal que xP_iy para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, então a função de escolha social para D deverá ser uma ordenação social onde se verifique a relação xPy .

Esta é uma condição com apelo autoevidente. É por vezes chamada de *condição fraca de Pareto*.⁶ Originalmente esta condição também não constava em Arrow (1951) nesta forma direta, mas foi incorporada na segunda edição.

Independência de Alternativas Irrelevantes (IAI): Sejam x e y duas das alternativas presentes no conjunto de alternativas a serem ordenadas. A ordenação social de x e y depende exclusivamente das ordenações individuais entre estas alternativas. Em outras palavras, sejam $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ e $\{R'_1, R'_2, \dots, R'_n\}$ nos quais a relação de preferência entre x e y é a mesma em R_i e R'_i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, então as respectivas ordenações sociais R e R' terão a mesma relação de preferência social entre x e y .

Parece haver duas interpretações para esta condição. A primeira, normativa, é a de que as pessoas estabelecem relações de preferência dois a dois sem levar em conta a presença ou não de alternativas (que serão avaliadas a seu tempo) e que, portanto, a ordenação social deve respeitar este caráter. A segunda, mais pragmática, é a de que uma eventual retirada de uma alternativa após a ordenação não deveria refletir em uma mudança nas demais ordenações. O exemplo em Arrow (1951) é o de um candidato que morre após uma eleição. Neste caso, as ordenações dos demais pelos eleitores não deveriam mudar.

Não Ditatoriedade (ND): Não poderá ocorrer que a ordenação social entre duas alternativas seja sempre igual a de um único indivíduo quando este demonstrar uma preferência estrita entre estas alternativas. Formalmente, para um conjunto com m alternativas, não pode existir um i -ésimo votante tal que $x_pP_ix_q$, com $p, q = 1, \dots, m$ e $p \neq q$, necessariamente implique que x_pPx_q na ordenação social.

O ditador de Arrow seria um votante que sempre observaria que a ordenação social coincide com a sua quando este demonstra uma relação de preferência estrita entre duas alternativas, seja qual for a sua ordenação. Observe que não é alguém que tomou o poder ou que fez a “máquina de escolhas” se comportar assim, é um eventual agraciado com a situação.

O resultado que Arrow (1951) chamou de *Teorema Geral* acabou sendo mais conhecido como **Teorema da impossibilidade de Arrow**. O teorema original é equivalente a um que informa não existir função social que estabeleça uma ordenação completa e transitiva simultaneamente à observação das condições DI, U, IAI e ND em um problema com três ou mais alternativas. Além da prova de Arrow, existem várias outras na literatura; somente Geanakoplos (2005) apresentou três alternativas em um artigo bastante breve.

6. Uma *condição forte de Pareto* ocorreria se fossem substituídos P_i por R_i e P por R na definição da Condição de Unanimidade; adicionalmente, caso ocorra $i \in \{1, \dots, n\}$ para o qual a relação é de preferência estrita, então a relação social também será estrita (Sen (1986, p. 1075)).

1.4 Dois resultados de Sen: um positivo e um negativo

Sabe-se, da microeconomia, que uma escolha pode ser estudada por meio de uma estrutura de preferências e as decorrentes ordenações, como na abordagem de Arrow, mas também por uma *função de escolha*. Por exemplo, sejam \mathcal{A} um conjunto de alternativas e C uma função de escolha, então a ideia é estabelecer que $C(\mathcal{A}) = \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, onde \mathcal{B} é o conjunto dos elementos que são elegíveis para a escolha dados os critérios que definem C .⁷ Particularmente, é possível definir uma função de escolha induzida pelas preferências. Por exemplo, definindo

$$C(\mathcal{A}, R) := \{x \in \mathcal{A} \mid xRy, \forall y \in \mathcal{A}\},$$

ou seja, estabelecendo que o critério que define o conjunto dos elementos que podem ser escolhidos é ser ao menos tão bom quanto qualquer outro no conjunto inicial de alternativas.

Um autor que é extremamente habilidoso em passar de um método para outro, compará-los e compatibilizá-los é Amartya Sen. Em Sen (1969) está provado que uma função escolha induzida por uma relação de preferência *quase-transitiva*, ou seja, onde a garantia de transitividade ocorre apenas na relação P , seria possível mesmo quando impostas condições equivalentes àquelas de Arrow, ou seja, domínio irrestrito, unanimidade, independência de alternativas irrelevantes e não ditatoriedade. Desta forma, Sen (1969) ofertou um *resultado positivo* para a TES.⁸ Uma observação importante é que a quase-transitividade é suficiente para garantir que não haverá ciclos na escolha.

Por outro lado, o mesmo autor (Sen 1970) também é responsável por um dos *resultados negativos*, um de impossibilidade, mais conhecidos da TES. Desta vez é informada uma nova condição relacionada à noção normativa de que algumas escolhas devem ser individuais, ao invés de impostas por uma maioria.

Condição de Liberalismo de Sen: Para cada pessoa ou votante em um problema de escolha coletiva, haverá ao menos um par de alternativas para o qual a ordenação social será sempre igual a ordenação desta pessoa.

Inicialmente, Sen (1970) vai informar um teorema (Teorema I) que afirma não ser possível obter uma função de escolha que concilie as condições de domínio irrestrito, unanimidade e a sua condição de liberalismo. Entretanto, o autor vai informar uma condição mais fraca logo em seguida, a condição de *mínimo liberalismo*:

Condição de Mínimo Liberalismo de Sen: Para cada problema de escolha social devem existir ao menos duas pessoas, tal que para cada uma delas haverá ao menos um par de alternativas para qual a ordenação social será sempre igual à sua ordenação pessoal.

Obviamente que a Condição de Liberalismo de Sen é um caso particular da sua Condição de Mínimo Liberalismo. Sen (1970) enunciou e provou um teorema (Teorema II) que afirma que não é possível

7. Como o caso geral é um no qual $C(\mathcal{A})$ é um conjunto que pode conter mais de um elemento, então C é um *mapa ponto-conjunto*, um objeto matemático que leva elementos de um domínio para conjuntos em sua imagem. Uma função é um mapa ponto-conjunto para o qual o elemento da imagem é sempre um conjunto de cardinalidade igual a 1. Em economia é mais comum o termo *correspondência* ao invés de mapa ponto-conjunto. Embora não seja o mais adequado, será mantido aqui o uso do termo “função de escolha” para não afastar do que está consolidado na área.

8. No presente trabalho, o termo “positivo” aparece com dois significados. No atual contexto, do trabalho de Sen (1969), o “resultado positivo” é o contrário de “resultado negativo” ou “resultado de impossibilidade”. Mais a frente, o termo “positivo” aparecerá em contraposição ao termo “normativo”.

obter uma função de escolha que concilie as condições de unanimidade, domínio irrestrito e de mínimo liberalismo. Provando, portanto, também o seu Teorema I em decorrência.

1.5 Manipulação de votos

Em Gibbard (1973) é definida uma representação na forma de jogo e uma classe de jogos, chamados de *esquemas de votação*, nos quais as estratégias de cada jogador são ordenações sobre alternativas e o resultado é uniforme entre os participantes. Considere um resultado x de um esquema de votação onde todos os jogadores (os votantes) ordenam honestamente as suas preferências sobre as alternativas. Posteriormente, suponha que quando somente um dos jogadores muda a sua ordenação, enquanto as dos demais permanece com a sua ordenação honesta, então o resultado do esquema de votação é y . Um esquema de votação será classificado como *manipulável* se y for estritamente preferível a x para o jogador que alterou sua ordenação. O resultado de Gibbard (1973, p. 595) é que “[t]odo esquema de votação com ao menos três resultados é ditatorial ou manipulável”, sendo esta noção de ditatoriedade compatível com a de Arrow. O resultado de uma forma mais generalizada ficou cunhado na teoria como *Teorema de Gibbard-Satterthwaite*, dado o trabalho quase que simultâneo ao de Gibbard realizado por este segundo autor.⁹

2 Considerações sobre os resultados negativos da TES

Uma crítica bastante contundente ao Teorema de Arrow foi feita pelo economista Gordon Tullock (1967). Este autor classificou o resultado de Arrow (1951) como irrelevante, algo que raramente se manifestaria em um processo de escolha real. O seu argumento principal é que os paradoxos de votação são de menor importância em votações com um grande número de pessoas. O que apoia este argumento é uma generalização da hipótese de preferências de pico único para escolhas multidimensionais e, conseqüentemente, a generalização do resultado de Black (1948) para escolhas entre várias alternativas. Ao invés de uma ordenação para uma única variável em uma escala, temos várias simultaneamente. Segundo Tullock (1967), a combinação de uma população grande de eleitores com o resultado generalizado para a teoria de Black (1948) seria representativa da maioria dos problemas reais.

Os argumentos de Tullock (1967) podem ser analisados diretamente, mas esta referência também é útil para explorar mais sobre este autor e a sua linha de pesquisa. Tullock é um dos fundadores da chamada *Teoria da Escolha Pública* (TEP), uma corrente distinta da TES na discussão de problemas de escolha coletiva.¹⁰ Outro exemplo vindo da TEP é o artigo de Brown (1982). Neste, o autor defende que o próprio processo de escolhas em pequenos comitês pode levar a alterações nas ordenações de preferências. Em um exemplo com a mesma estrutura do “Paradoxo de Condorcet”, Brown (1982) observa que uma única mudança de ordenação de um dos votantes pode levar a uma escolha de maioria. A partir disto, o autor defende que este tipo de raciocínio, onde os agentes podem fazer adaptações estratégicas, pode levar a

9. Para uma exposição didática e a referência do artigo de Satterthwaite veja (List 2022).

10. Veja Mueller (2012) sobre este tópico. O curioso é que Arrow (1951) também é considerado um trabalho seminal na Teoria Escolha Pública neste artigo.

perspectivas mais uteis do que aquelas tradicionalmente associadas à uma análise estática, feita de uma vez por todas etc.

Retornando à TES, um autor que provavelmente é menos conhecido do que Arrow e Sen por economistas, mas de grande importância nesta área, é o matemático Donald Saari, alguém com uma extensa contribuição para o tema. Em Saari (2008) é realizado um grande esforço de ilustrar conceitos e desenvolvimentos matemáticos de maior dificuldade em exemplos simples e um texto acessível. Um dos principais resultados informados é que o Teorema de Arrow, assim como outros paradoxos de votação, ocorre pela tentativa de conciliar a condição de independência de alternativas irrelevantes (IAI) com a transitividade da relação de ordenação. Em termos informais, isso é devido ao fato de a IAI implicar que a função social seja dada pela soma de funções independentes aplicadas sobre cada dupla de alternativas, daí também ser chamada de *independência binária*. Desta forma, segundo Saari (2008), a informação que cada ordenação individual traz com relação às suas transitividades (e, portanto, com relação à racionalidade de cada pessoa) é ignorada pela função ao se impor a independência binária, uma vez que esta ignora qualquer relação com as demais alternativas.

Além disso, Saari (2008) chama a atenção para o que ele nomeou de “maldição da dimensionalidade” (*curse of dimensionality*, no original). A tese é que a dimensão do espaço de escolhas cresce exponencialmente em relação ao número de alternativas consideradas. Por exemplo, suponha que cada par de alternativas é uma resposta favorável ou contrária a uma específica ação. Assim, seja A a primeira ação, então as pessoas podem votar escolhendo entre A e N_A , N_A significando “não fazer A ”. A dimensão do espaço de escolhas é 2, ou (A) ou (N_A) . Para uma votação por maioria, por exemplo, se A e N_A assumirem valores em uma reta real, a distribuição de votos será representada por um ponto entre estes dois valores. Se é adicionada uma nova pergunta B para a qual o votante deverá escolher entre B e N_B , então o espaço de escolhas é formado pelos possíveis votos na forma (A, B) , (A, N_B) , (N_A, B) e (N_A, N_B) , ou seja, de quatro dimensões. A importância disso se destaca quando as alternativas A e B não são independentes. Considere um exemplo. Um sindicato com mil membros fechou o ano com um saldo líquido em sua conta. Alguns membros sugeriram a realização de uma festa de confraternização, enquanto outros uma doação para uma entidade filantrópica; todo o recurso que não for gasto agora será adicionado para o orçamento do próximo ano. Foi, então, realizada uma votação na qual cada associado manifestava se queria uma festa de final de ano ou não (A e N_A) e se queria uma doação para a entidade filantrópica ou não (B ou N_B). Foram contabilizados 100 votos (A, B) , 200 (N_A, N_B) , 330 (A, N_B) e 370 (N_A, B) . Em um primeiro momento, nota-se que uma maioria de 570 não quer uma festa (A), enquanto uma maioria de 530 não quer fazer uma doação (B). Desta forma, alguém poderia argumentar que a maioria quer poupar os recursos para o orçamento do próximo ano. Entretanto, uma maioria de 800 quer fazer algum uso dos recursos agora, considerando as duas alternativas sugeridas.¹¹ Adicionando uma escolha C , o tamanho da dimensão sobe para oito e assim por diante. Ou seja, quanto maior o número de escolhas, mais provável o surgimento de “paradoxos” na agregação.¹²

Por fim, será importante ressaltar uma perspectiva da escolha social que não foi apresentada ainda.

11. Este exemplo foi criado com a mesma linha de raciocínio do exemplo original apresentado em Saari (2008).

12. Aqui e no parágrafo anterior, os argumentos de Saari (2008, cap. 2) foram bastante simplificados para a facilidade de exposição.

Não foi discutido qual o objetivo a ser alcançado com o processo de escolha. São diversas possibilidades a depender do contexto. A escolha pode ser um procedimento recorrente e periódico, como as eleições em uma democracia, que permitem (ao menos em tese) alternância de poder e acesso a este por diferentes grupos. A escolha pode ser recorrente, mas não periódica, como quando se instalam comitês ou bancas para a contratação de docentes em universidades e institutos de pesquisa. Pode ocorrer que a escolha seja uma necessidade frente a uma novidade como, por exemplo, quando um grupo é ameaçado por outro e tem que deliberar se buscará uma solução pelo confronto ou tentar a diplomacia. Portanto, os objetivos podem considerar várias possibilidades como, por exemplo, a otimização de uma variável, a conciliação de diferentes grupos e interesses, legitimidade, justiça, sobrevivência do grupo etc.

Young (1997) assume a perspectiva de que o objetivo daqueles que compõem o processo de escolha é o de realizar a escolha correta, supondo que esta exista. Um exemplo é o de um júri, de fato ou um acusado de um crime é culpado ou não; o objetivo do júri é chegar ao veredito correto. Neste trabalho, Young (1997) remete a Jean-Jacques Rousseau e Condorcet como autores que defendiam esta perspectiva. Em particular, Young (1997) explora e generaliza os desenvolvimentos de Condorcet com a perspectiva da análise de *máxima verossimilhança*. A ideia é que a melhor escolha será aquela com a maior probabilidade de ser a correta. Da mesma forma, o autor também analisa o mecanismo de escolha de Borda, a saber, um baseado na atribuição de pontos para as alternativas nas ordenações individuais, levando à escolha social a alternativa com maior soma de pontos.

Os resultados em Young (1997) são uma compilação daquilo que este autor desenvolveu em alguns de seus trabalhos. São proposições bastante abrangentes, que mereceriam uma análise em particular, cabendo aqui apenas a sua menção como uma novidade na forma de investigar o mesmo tipo de problema. A conclusão do autor é que, mesmo com o resultado de impossibilidade de Arrow (1951), é possível julgar se um mecanismo é melhor do que outro, considerando qual será o produto do processo de escolha.

3 Modelagem dinâmica na TES

Em um contexto amplo, Lorenz e Neumann (2018) resumiram e organizaram várias contribuições recentes (pós 2000) sobre temas como formação de preferências e crenças e também sobre dinâmica de opinião em grandes grupos, evidenciando que houve uma considerável atenção ao tema neste período. A ênfase na dinâmica reflete o fato de que a experiência da escolha coletiva é realizada ao longo do tempo e sujeita a variações. Nesta seção o objetivo é apresentar algumas possibilidades recentes na literatura, dando preferência para artigos publicados em meios mais ligados à economia.

Em três artigos recentes, observou-se o emprego de cadeias ou processos de Markov para a introdução do elemento dinâmico. Como se sabe, uma cadeia de Markov (no tempo discreto) considera um processo estocástico para o qual a probabilidade de certa variável discreta em um período t do tempo depende apenas de valores de estado em $t - 1$, sendo comum que a única variável de estado seja a própria, ou seja, que a probabilidade de um valor x_t seja determinado exclusivamente pelo valor x_{t-1} realizado no momento antecedente. Em processos de Markov, a diferença é que a variável é contínua.

Billot e Qu (2022) estudaram um processo de convergência de probabilidades subjetivas e utilidades,

o qual classificaram como um modelo de *deliberação*. A ideia é que as pessoas podem alterar suas variáveis de escolha a medida que interagem com as outras, observam as suas posições e consideram que pode haver uma opinião construída com mais informação ou mais especializada do que a sua própria. A estrutura do modelo é definida por uma *matriz de deliberação*, uma na qual o elemento da i -ésima linha e da j -ésima coluna informa o peso que o i -ésimo agente atribui ao posicionamento (em termos de distribuição de probabilidades subjetivas ou de utilidades) do j -ésimo. Os pesos são não negativos, somam 1 em cada linha e, particularmente, o peso que o agente dá ao seu próprio argumento está no intervalo $(0, 1)$. Desta forma a matriz de deliberação é quadrada de ordem igual ao número de pessoas na população. Além disso, com as propriedades definidas, trata-se de uma matriz estocástica (soma das linhas igual a 1) convergente. A convergência significa que existe uma matriz para a qual a potência da matriz de deliberação se aproxima a medida que o expoente cresce. Determina-se que o valor da variável individual (para a distribuição de probabilidades ou para as utilidades) em um período do tempo discreto é dado por uma função, uma *regra de transição*, da matriz de deliberação e do vetor inicial de valores da variável para todos os agentes. Como a matriz é convergente, é possível observar a definição (ou aproximação) de consensos para os valores das duas variáveis e, assim, uma *função de utilidade esperada social*. Adicionalmente, os autores observam que o consenso varia com as regras de transição individuais e que é possível estabelecer comparações em termos paretianos dos resultados finais.

No segundo artigo, Okada e Sawa (2024) focaram na comparação dois a dois de diferentes alternativas através de votações majoritárias, não apenas de maiorias simples, mas também de qualquer valor de maioria no intervalo definido por $(0,5, 1]$. A síntese do modelo é a seguinte: em uma população com um número finito de votantes, cada um tem um estrutura de preferências estritas (a relação P) sobre um conjunto finito de diferentes políticas a mercê da escolha coletiva. Em um determinado momento vigora uma política, mas recorrentemente ocorrem votações onde cada um vota por manter a política atual ou adotar uma alternativa sugerida. A alternativa comparada é escolhida aleatoriamente, sendo que a probabilidade de uma vir a ser selecionada para comparação é sempre não nula. É introduzido um fator de erro ε , com $0 < \varepsilon < 1$, para o qual cada votante escolhe segundo a sua preferência com probabilidade igual a $1 - \varepsilon$, ou contra a sua preferência com probabilidade ε . Nas simulações dos autores, o valor de ε foi de 0,01 e 0,03, ou seja, valores pequenos. O objetivo desta variação é introduzir um comportamento análogo ao de uma mutação, para poder analisar o problema com o instrumental da *teoria dos jogos evolucionários*. Como se sabe, nesta vertente da teoria dos jogos, diferentes frações de uma população adotam diferentes estratégias, havendo um *equilíbrio evolucionariamente estável* quando uma divisão entre diferentes grupos de uma população é dinamicamente estável frente a uma mutação, ou seja, ao surgimento de uma variação em um comportamento (estratégia). Trata-se de um conceito derivado da noção de estabilidade local do equilíbrio.¹³ Com este fator de erro aleatório, um possível equilíbrio será chamado de *estocasticamente estável*, uma vez que as variações seguem uma distribuição de probabilidades. Observe que uma alternativa não preferida por um número suficiente de votantes só irá ganhar uma votação se alguns destes votantes cometer um erro. Como o fator de erro é independente por votantes, a sua coincidência tenderá a ter um valor perto de zero. Um equilíbrio será estocasticamente estável quando a probabilidade de ocorrer

13. Veja Vega-Redondo (1996), por exemplo, para uma referência sobre jogos evolucionários.

no infinito for maior do que zero. Os resultados em Okada e Sawa (2024) permitem comparações com os resultados estáticos da TES, principalmente aqueles derivados da análise das votações majoritárias. Um resultado importante é que uma política será estocasticamente estável se fizer parte do conjunto que forma uma *circularidade superior* (*top cycle set*, no original) e for estável neste conjunto também.¹⁴ A circularidade superior é um grupo no qual há uma cadeia de circularidade e para o qual cada membro venceria uma votação contra eventuais não membros do grupo.

Observe que apesar de Billot e Qu (2022) e Okada e Sawa (2024) empregarem aparatos similares para a análise dinâmica, cadeias ou processos de Markov convergentes, os objetivos são distintos. No primeiro artigo, a ideia é permitir uma evolução, um processo de mudança, nas preferências, com a possibilidade de que haja convergência. Já no segundo, a estrutura é mais tradicional, as preferências não variam, apenas um fator de erro é introduzido com o objetivo de testar a resiliência de um equilíbrio.

Por fim, Duggan e Forand (2021) constroem um engenhoso modelo para introduzir a dinâmica, através de um processo infinito de escolhas de políticas e eleições de representantes, para ampliar os desenvolvimentos originais de Anthony Downs. Como se sabe, este autor é comumente lembrado pelo *Teorema do Eleitor Mediano*, uma aplicação dos resultados de Black (1948) que prevê a convergência do posicionamento de políticos concorrentes para a posição mediana no espectro dos eleitores.¹⁵ Para obter tal generalização, Duggan e Forand (2021) estabelecem um modelo padrão de voto direto em políticas, no qual a cada período do tempo haverá um determinado estado de mundo e, para este, há um *eleitor representativo* que escolherá uma política dentro das disponíveis. Feita esta escolha, o próximo estado de mundo é definido por uma distribuição de probabilidades que depende do estado de mundo atual e da política escolhida. Esta dinâmica forma um jogo estocástico, onde os jogadores são os tipos de eleitores. Considerando a estrutura do jogo, os autores informam que existirá um conjunto não vazio de *equilíbrios perfeitos estacionários de Markov* e, adicionalmente, que o número de elementos deste conjunto é maior do que um na maioria dos casos.

Sobre este modelo padrão, os autores (Duggan e Forand 2021) constroem um segundo no qual, a cada período, o agente encarregado de escolher a política a ser implementada é um representante eleito no período anterior. Após a escolha da política, o eleitor representativo, novamente determinado pelo estado de mundo, irá escolher entre manter este representante ou substituí-lo por um outro. Este outro é escolhido aleatoriamente para concorrer. O objetivo dos autores é verificar se a escolha estratégica do político no poder pode ser consistente com a escolha estratégica dos eleitores, chegando a configurações compatíveis. Ao final, os autores estudam as possibilidades de existência de eleitores representativos, que até então estavam sendo assumidos, aproximando os seus resultados com os de Downs.

Aqui cabe uma pequena digressão. No site da revista *Public Choice*, o principal periódico da TEP, é informado que “Public Choice is a leading scholarly journal applying economics to nonmarket social phenomena, such as politics, religion, law, conflict, and the family.”¹⁶ Contribuições como a de Downs são exemplos claros desta área. De fato, Zamora-Bonilla (2023, p. 148) informa que Downs é, juntamente

14. Trata-se do Teorema 4.2 de Okada e Sawa (2024, p. 295). Entretanto, parece haver um erro no texto. O enunciado do teorema é mais abrangente do que aquilo que é apresentado em sua explicação e no exemplo que segue. O resultado enunciado aqui é o que segue da explicação.

15. Veja a referência para o trabalho de Downs e uma revisão da literatura subsequente no artigo de Duggan e Forand (2021).

16. O site da revista é <https://link.springer.com/journal/11127>.

a Black, um dos pais fundadores da TEP. Não obstante, o artigo de Duggan e Forand (2021) está publicado na *Social Choice and Welfare*, o principal periódico da TES. Esta é uma evidência da complementaridade das duas abordagens e da sobreposição das comunidades científicas.

Esta perspectiva é mais próxima da interpretação de Dennis C. Mueller do que a de Jesús Zamora-Bonilla, para mencionar dois autores já citados neste trabalho. Sumarizando, para Zamora-Bonilla (2023) a TES (i) possui um viés de esquerda (*left-wing*), (ii) tem preocupações normativas sobre os instrumentos de escolha coletiva e (iii) emprega métodos axiomatizados em suas análises; já a TEP (i) possui um viés de direita (*right-wing*) e (ii) se preocupa em realizar uma análise econômica dos processos políticos como eles (supostamente) são, uma análise positiva. Mueller (2015) também afirma que a TES é mais normativa, enquanto a TEP é mais positiva, entretanto, identifica aspectos normativos em trabalhos seminais da TEP. Em busca de evidências sobre a diferença entre os dois segmentos na atualidade, este autor (Mueller 2015) analisou artigos das duas revistas citadas no parágrafo anterior, para o período de 2009-2013, classificando cada artigo em uma de quatro categorias: teórico matemáticos, teórico não matemático (ou não intensivamente matemáticos), empíricos e, finalmente, os experimentais. Os resultados foram que cerca de 92% dos artigos na *Social Choice and Welfare* pertencem a categoria “teóricos matemáticos”, enquanto que na *Public Choice* a parcela deste grupo era de apenas um terço; por outro lado, mais da metade dos artigos nesta revista pertenciam à categoria “empíricos” (Mueller (2015, p. 383)). Aqui, continuará sendo assumido que estas fronteiras são bastante porosas.

Retornando ao tema de possibilidades de modelagem dinâmica, outras são mais tradicionais do que aquelas até aqui apresentadas. Um exemplo é o trabalho de Hayashi (2024). Este artigo apresenta em sua introdução uma revisão dos principais resultados da agregação de crenças nas situações onde os votantes estão em desacordo, chamando a atenção para resultados de impossibilidade quando os desacordos são simultaneamente sobre crenças e gostos. Desta forma, o autor se propõe investigar propriedades de regras de agregação para o caso onde apenas as crenças estão em desacordo, ou seja, situações onde os agentes concordam sobre qual escolha deve ocorrer para cada eventualidade, mas não concordam a princípio sobre qual é o *estado de mundo* vigente. Como visto anteriormente, Billot e Qu (2022) também trabalham com a dinâmica de elementos da utilidade esperada, mas há uma diferença aqui. Enquanto que na sociedade estudada por Billot e Qu (2022) existe uma tendência, uma vontade de concordância, em Hayashi (2024) a ideia é extrapolar a regra de aprendizado dos indivíduos para uma agregação que seja dinamicamente consistente. Em termos informais, isto significa que não existe reversão de preferências durante o período de aprendizado, supondo que o resultado somente é aferido após um número finito de períodos. Os resultados são bastante técnicos para serem sumarizados aqui, mas cabe a menção dentro das possibilidades de desdobramentos dinâmicos da TES.

Encerrando esta seção, vale a pena mencionar o campo de pesquisa denominado *Escolha Social Computacional*. Trata-se de contribuições interdisciplinares entre a TES e a ciência da computação. Como se sabe, o processo de organização de um problema e de seleção de uma técnica para a resolução da sua solução (ou de uma aproximação desta) pode estar sujeita a dificuldades ou mesmo impossibilidades em termos de tempo, de capacidade de computação e a disponibilidade de método. Vale recordar, mesmo que de passagem, da contribuição seminal de Herbert Simon para a perspectiva computacional do

comportamento econômico. A colaboração entre a TES e a ciência da computação vem ocorrendo nos dois sentidos. A ciência da computação fornece elementos para a análise dos processos, enquanto a TES fornece resultados e técnicas para a aplicação em problemas de escolha coletiva em áreas de interesse da computação e que não necessariamente envolvem pessoas.¹⁷ Por exemplo, Salhab, Ny e Malhamé (2018) fazem uma análise da dinâmica das escolhas individuais em uma população grande (tendendo ao infinito) por meio do instrumental da teoria dos jogos dinâmicos. Mais especificamente, estes autores aplicam um modelo de *mean field games*, um conjunto de técnicas que consideram que a influência de cada jogador sobre o outro é baixa (devido a população ser grande), enquanto o efeito da população como um todo (efeito de campo) é grande. Uma aplicação sugerida pelos autores é a da programação individual em um enxame de robôs, onde o objetivo é realizar uma varredura em um campo. Uma situação na qual cada máquina escolhe autonomamente sua trajetória, valorando de forma individual diferentes pontos de chegada, mas buscando não se afastar do grupo.

Considerações finais

Buscou-se organizar neste trabalho uma síntese de resultados seminais na chamada Teoria da Escolha Social, área multidisciplinar com muitos elementos das ciências econômicas. Nesta, busca-se analisar e testar os limites teóricos e filosóficos das mais variadas formas de implementar uma escolha coletiva. Ainda que a “primeira leva” de resultados nesta área tenha evidenciado, majoritariamente, limitações ou impossibilidades quando os exercícios teóricos exploraram um caráter ideal dos mecanismos de escolha, a necessidade de obter decisões de coletivos se impôs, uma vez que tais processos de escolha são onipresentes nas sociedades e, recentemente, nos ambientes virtuais.

Desta forma, também buscou-se aqui observar como trabalhos bastante recentes têm tratado o problema, principalmente em processos dinâmicos, outra grande dificuldade da teoria econômica. Do que se observou, mesmo em uma tentativa preliminar de sistematização, as possibilidades são amplas, sejam em técnicas ou em aplicações.

É provável que a dominância de “resultados negativos” nos estágios iniciais da TES tenha contribuído para que a pesquisa nesta área tivesse um maior grau de liberdade, frente aquilo que se observa nas demais áreas do *mainstream* econômico. A lista de artigos resenhados na Seção 3 configura uma amostra desta liberdade. Mesmo quando são empregados elementos bastante tradicionais da formalização econômica, como o equilíbrio de Nash, o aprendizado bayesiano, a hipótese da utilidade esperada etc, os trabalhos parecem conter muito mais originalidade e, por que não, mais vigor do que em outras áreas da teoria econômica.

17. Esta parece ser a perspectiva da organização de dois números especiais em duas revistas importantes, confira o editorial de Elkind e Lang (2011) para a *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, mais aproximada com a computação, e também Brandt e Zwicker (2012) na *Mathematical Social Sciences*, mais ligada à TES. Veja também Brandt et al. (2016).

Referências

- Arrow, K. J. 1951. *Social Choice and Individual Values*. (Edição de 2012). Mansfield Centre: Martino Publishing.
- . 1963. *Social Choice and Individual Values*. 2ª edição. New York: John Wiley & Sons. <https://cowles.yale.edu/sites/default/files/2022-09/m12-2-all.pdf>.
- Bergson, A. 1938. «A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics». *The Quarterly Journal of Economics* 52 (2): 310–334.
- Billot, A. e X. Qu. 2022. «Deliberative Democracy and Utilitarianism». *Social Choice and Welfare* Publicado online. <https://doi.org/10.1007/s00355-022-01404-8>.
- Black, D. 1948. «On the Rationale of Group Decision-making». *Journal of Political Economy* 56 (1): 23–34.
- Brandt, F., V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang e A.D. Procaccia (eds.) 2016. *Handbook of Computational Social Choice*. New York: Cambridge University Press.
- Brandt, F. e W. S. Zwicker. 2012. «Editorial: Special Issue on Computational Foundations of Social Choice». *Mathematical Social Sciences* 64 (1): 1.
- Brown, P. 1982. «Toward an Informational Dynamics of Collective Choice». *Public Choice* 39:415–420.
- Duggan, J. e J. G. Forand. 2021. «Representative Voting Games». *Social Choice and Welfare* 56:443–466.
- Elkind, E. e J. Lang. 2011. «Guest Editorial: Special Issue on Computational Social Choice». *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems* 22:1–3.
- Geanakoplos, J. 2005. «Three Brief Proofs of Arrow’s Impossibility Theorem». *Economic Theory* 26:211–215.
- Gibbard, A. 1973. «Manipulation of Voting Schemes: A General Result». *Econometrica* 41 (4): 587–601.
- Hayashi, T. 2024. «Belief aggregation, updating and dynamic collective choice». *Journal of Mathematical Economics* 115:103050.
- List, C. 2022. «Social Choice Theory». Em *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Winter 2022, editado por E. N. Zalta e U. Nodelman. Metaphysics Research Lab, Stanford University. <https://plato.stanford.edu/archives/win2022/entries/social-choice/>.
- Lorenz, J. e M. Neumann. 2018. «Opinion Dynamics and Collective Decisions». *Advances in Complex Systems* 21 (6 & 7): 1802002.
- Lützen, J. 2019. «How Mathematical Impossibility Changed Welfare Economics: A history of Arrow’s impossibility theorem». *Historia Mathematica* 46:56–87.

- May, K. O. 1954. «Intransitivity, Utility, and the Aggregation of Preference Patterns». *Econometrica* 22 (1): 1–13.
- Morreau, M. 2019. «Arrow's Theorem». Em *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Winter 2019, editado por E. N. Zalta. Metaphysics Research Lab, Stanford University. <https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/arrows-theorem/>.
- Mueller, D. C. 2012. «Gordon Tullock and Public Choice». *Public Choice* 152 (1/2): 47–60.
- . 2015. «Public Choice, Social Choice, and Political Economy». *Public Choice* 163:379–387.
- Okada, A. e R. Sawa. 2024. «The Evolution of Collective Choice Under Majority Rules». *Journal of Economic Behavior and Organization* 225:290–304.
- Saari, D. G. 2008. *Disposing Dictators, Demystifying Voting Paradoxes*. New York: Cambridge University Press.
- Salhab, R., J. L. Ny e R. P. Malhamé. 2018. «Dynamic Collective Choice: Social Optima». *IEEE Transactions on Automatic Control* 63 (10): 3487–3494.
- Sen, A. 1969. «Quasi-Transitivity, Rational Choice and Collective Decisions». *The Review of Economic Studies* 36 (3): 381–393.
- . 1970. «The Impossibility of a Paretian Liberal». *Journal of Political Economy* 78 (1): 152–157.
- . 1986. «Social Choice Theory». Em *Handbook of Mathematical Economics*, editado por K. J. Arrow e M. D. Intriligator, 3:1073–1181. Amsterdam: North-Holland.
- Tullock, G. 1967. «The General Irrelevance of the General Impossibility Theorem». *The Quarterly Journal of Economics* 81 (2): 256–270.
- Vega-Redondo, F. 1996. *Evolution, games, and economic behaviour*. Oxford: Oxford University Press.
- Young, H. P. 1997. «Group Choice and Individual Judgements». Em *Perspectives on Public Choice: a handbook*, editado por D. C. Mueller, 181–200. Cambridge: Cambridge University Press.
- Zamora-Bonilla, J. 2023. «Public Choice versus Social Choice as Theories of Collective Action». Em *The Oxford Handbook of Philosophy of Political Science*, editado por H. Kincaid e J. Van Bouwel, 141–153. Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780197519806.013.7>.